

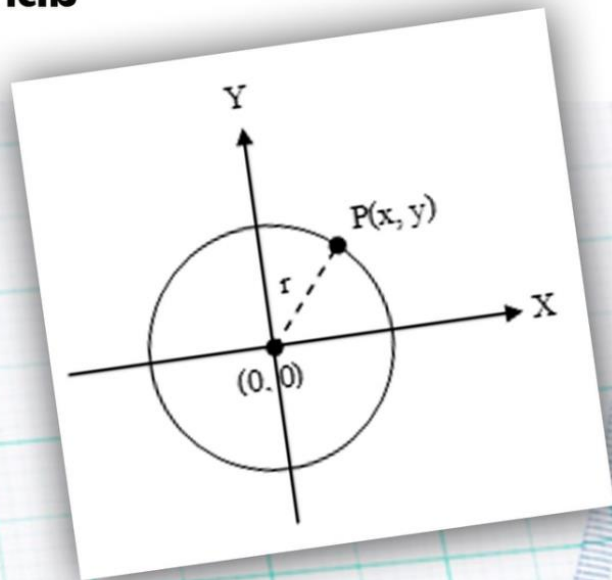
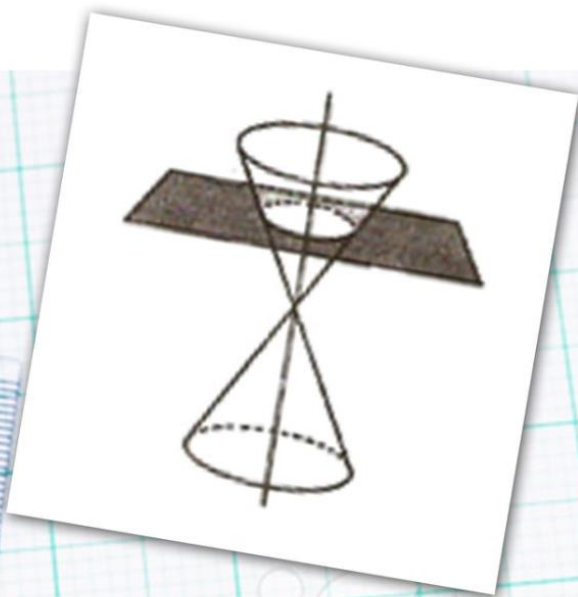
เรื่อง

แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์ ภาคตัดกรวย

ค31202 รายวิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม 2
ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

วงกลม

เล่มที่ 1 ความรู้พื้นฐานของวงกลม



จัดทำโดย นายประยุทธ์ รนากาญจนภาส
ตำแหน่ง ครูชำนาญการ กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์

โรงเรียนพระปฐมวิทยาลัย

สำนักงานเขตพื้นที่การศึกษามัธยมศึกษา เขต 9

สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน กระทรวงศึกษาธิการ

คำนำ

แบบฝึกทักษะเรื่อง ลำดับอนันต์และอนุกรมอนันต์ เล่มที่ 1 เรื่อง การสร้างสมการวงกลม จัดทำขึ้นเพื่อประกอบการเรียนวิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค31202 สำหรับนักเรียน ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 โดยจัดกิจกรรมการเรียนรู้ควบคู่กับการจัดการเรียนรู้โดยใช้รูปแบบการสอนแบบร่วมมือกันเรียนรู้ เทคนิค STAD ซึ่งเป็นรูปแบบการเรียนรู้ที่จะช่วยพัฒนานักเรียนให้ประสบผลสำเร็จในการเรียนคือ พัฒนานักเรียนทางด้านสติปัญญา ด้านสังคม โดยให้นักเรียนทำงานร่วมกันเป็นกลุ่มเล็กๆ กำหนดบทบาทของสมาชิก นักเรียนแต่ละคน มีความรับผิดชอบในงานของตน นักเรียนที่เรียนเก่งช่วยเหลือ นักเรียนที่เรียนอ่อน สนับสนุนความคิด ความสำเร็จซึ่งกันและกัน สามารถทำงานร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข โดยนักเรียนจะต้องคำนึงถึงรางวัลหรือเป้าหมายของกลุ่ม ความหมายของแต่ละบุคคลในกลุ่ม และสมาชิกแต่ละคนในกลุ่มมีโอกาสที่จะช่วยให้กลุ่มประสบความสำเร็จเท่าเทียมกัน

แบบฝึกทักษะนี้จะช่วยส่งเสริมการเรียนรู้ให้ผู้เรียนได้ฝึกฝนทักษะเพิ่มเติม เพื่อให้เกิดความรู้ ความเข้าใจในบทเรียนเรื่องภาคตัดกรวย ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์ และส่งเสริมให้นักเรียน มีทัศนคติที่ดีต่อการเรียน คณิตศาสตร์ ภายในเล่มประกอบด้วย ใบความรู้ แบบฝึกทักษะ และแบบทดสอบท้ายวงจรปฏิบัติการจะมีปรากฏเฉพาะเล่มที่ 3, เล่มที่ 6, เล่มที่ 9 และเล่มที่ 12 โดยแบบฝึกทักษะแต่ละเล่มเน้นทักษะการคิดคำนวณ ความสมเหตุสมผล การเชื่อมโยงกับเนื้อหาต่างๆ ที่ได้เรียนมา

การจัดทำแบบฝึกทักษะได้สำเร็จล่วงไปด้วยดี ได้รับการสนับสนุนส่งเสริมจากผู้อำนวยการ โรงเรียนสมุทรสาครวิทยาลัย คณะครูโรงเรียนสมุทรสาครวิทยาลัย และผู้อำนวยการโรงเรียนพระปฐมวิทยาลัย คณะครูโรงเรียนพระปฐมวิทยาลัย และขอขอบคุณทุกท่านที่ได้ นำแบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่องภาคตัดกรวย ไปทำการทดลองใช้พร้อมทั้งให้ข้อเสนอแนะ และคำแนะนำจนทำให้แบบฝึกทักษะคณิตศาสตร์ เรื่อง เรื่องภาคตัดกรวย ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ทั้ง 12 เล่มเสร็จสมบูรณ์

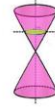
ผู้จัดทำหวังเป็นอย่างยิ่งว่าแบบฝึกทักษะนี้จะเป็นประโยชน์ ต่อการจัดการเรียนรู้วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ระดับชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ต่อไป

ประยูทธ ธนากาญจน์ภาส

สารบัญ

หน้า

คำชี้แจงในการใช้แบบฝึกทักษะ	1
บทบาทและหน้าที่ของนักเรียน	2
สาระสำคัญ	3
จุดประสงค์การเรียนรู้	3
สาระการเรียนรู้	3
ใบความรู้ที่ 1.1 เรื่อง สมการของกราฟวงกลม	4
แบบฝึกทักษะ 1.1 เรื่อง สมการของกราฟวงกลม	9
แบบฝึกทักษะ 1.2 เรื่อง การเปลี่ยนสมการวงกลมในรูปทั่วไปให้เป็นรูปมาตรฐาน	10
ภาคผนวก	
เฉลยแบบฝึกทักษะ 1.1	12
เฉลยแบบฝึกทักษะ 1.2	13
แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1	14
บรรณานุกรม	21



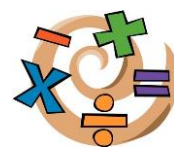
คำชี้แจงในการใช้แบบฝึกทักษะ

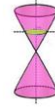
ข้อตกลงในการใช้แบบฝึกทักษะ

การทำแบบฝึกทักษะเรื่อง ภาคตัดกรวย เล่มที่ 1 เรื่อง ความรู้พื้นฐานของวงกลม เล่มนี้ จะทำแบบฝึกควบคู่ไปกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้รูปแบบการสอนแบบร่วมมือกันเรียนรู้ เทคนิค STAD (Student Teams Achievement Divisions) ซึ่งเป็นรูปแบบการเรียนรู้ที่จะช่วย พัฒนานักเรียนให้ประสบความสำเร็จในการเรียนคือ พัฒนานักเรียนทางด้านสติปัญญา ด้านสังคม โดยให้นักเรียนทำงานร่วมกันเป็นกลุ่ม กลุ่มละ 4-5 คน กำหนดบทบาทของสมาชิก นักเรียนแต่ละคน มีความรับผิดชอบในงานของตน นักเรียนที่เรียนเก่งช่วยเหลือนักเรียนที่เรียนอ่อน สนับสนุนความคิด ความสำเร็จซึ่งกันและกัน สามารถทำงานร่วมกับผู้อื่นได้อย่างมีความสุข โดยสมาชิกในกลุ่ม ประกอบด้วยนักเรียนเก่ง ปานกลาง และอ่อน นักเรียนควรมีความซื่อสัตย์ต่อตนเอง ไม่เปิดดูเฉลยก่อน เพราะถ้านักเรียนเปิดดูเฉลยก่อนเท่ากับว่านักเรียนลอกคำตอบซึ่งทำให้นักเรียนไม่ได้ทดสอบความรู้ ความเข้าใจสิ่งที่ได้ศึกษาไป

คำแนะนำในการใช้แบบฝึกทักษะ

1. นักเรียนในกลุ่มมีบทบาทหน้าที่ ที่แตกต่างกันไป โดยช่วยกันศึกษาเอกสารจากแบบฝึกทักษะ ควบคู่ไปกับการจัดกิจกรรมการเรียนรู้โดยใช้รูปแบบการสอนแบบร่วมมือกันเรียนรู้ เทคนิค STAD โดยมีครูคอยแนะนำ
2. นักเรียนทุกคนทำแบบฝึกทักษะ โดยภายในกลุ่มต้องช่วยเหลือซึ่งกันและกัน คนเก่งช่วยเหลือคนที่มีความสามารถทางด้านคณิตศาสตร์น้อยกว่า
3. เมื่อทำแบบฝึกทักษะเสร็จ สมาชิกภายในกลุ่มต้องช่วยกันตรวจคำตอบจากเฉลยท้ายแบบฝึกทักษะ และช่วยกันแก้ไขเมื่อมีคำตอบผิด





บทบาทและหน้าที่ของนักเรียน

ครูต้องชี้แจงให้นักเรียนทราบถึงบทบาทของนักเรียน ดังนี้

1. หัวหน้ากลุ่ม มีหน้าที่ดังนี้

- 1) เป็นผู้นำในการปฏิบัติกิจกรรมกลุ่ม โดยทำหน้าที่อ่านใบความรู้เพื่อให้ทุกคนทำตามคำชี้แจงในการทำกิจกรรมให้เป็นไปตามขั้นตอน
- 2) ควบคุมดูแลการทำกิจกรรมและกิจกรรมกลุ่ม ให้เป็นไปด้วยความเรียบร้อย ไม่ส่งเสียงดังรบกวนกลุ่มอื่น
- 3) ตรวจสอบความถูกต้องให้เรียบร้อยหลังจากเสร็จสิ้นการทำกิจกรรมการเรียนรู้แล้ว
- 4) เป็นผู้ติดต่อสื่อสารกับครูเมื่อมีปัญหาภายในกลุ่ม
- 5) คอยกระตุ้นให้สมาชิกในกลุ่มเห็นความสำคัญของคะแนนการพัฒนาของรายบุคคล และของกลุ่มเพื่อความรู้ความเข้าใจในกลุ่มและความภาคภูมิใจในของทุกคน
- 6) ร่วมอภิปรายและสรุปผลการปฏิบัติกิจกรรม

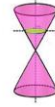
2. สมาชิกกลุ่ม มีหน้าที่ดังนี้

- 1) ปฏิบัติกิจกรรมด้วยความตั้งใจและให้ทันตามกำหนดโดยไม่ชวนเพื่อนคุยหรือเล่น
- 2) ศึกษาใบความรู้ แบบฝึกทักษะ และปรึกษาหารือวิธีคิดหาคำตอบภายในกลุ่ม
- 3) ร่วมอภิปรายและสรุปผลการปฏิบัติกิจกรรม

3. เลขานุการ มีหน้าที่คือ

- 1) บันทึกสรุปความรู้ที่ได้รับในการอภิปรายกลุ่ม เพื่ออธิบายความรู้ที่ได้รับให้เพื่อน ที่ยังไม่เข้าใจฟังเพิ่มเติม
- 2) เป็นผู้แจกแบบฝึกทักษะและรวบรวมนำไปส่งครูเมื่อสมาชิกทุกคนทำเสร็จเรียบร้อยแล้ว
- 3) เป็นผู้อ่านเฉลยแต่ละกิจกรรมให้เพื่อนฟังเพื่อตรวจคำตอบ
- 4) ร่วมอภิปรายและสรุปผลการปฏิบัติกิจกรรม





แบบฝึกทักษะวิชาคณิตศาสตร์ ค31202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 ที่เน้นการจัดกิจกรรมการเรียนการสอนแบบ STAD เรื่อง ภาคตัดกรวย เล่มที่ 1 เรื่อง สมการของกราฟวงกลม

สาระสำคัญ

ภาคตัดกรวย (Conic Section) หมายถึงเส้นโค้ง ซึ่งได้แก่ วงกลม(Circle) พาราโบลา(parabola) วงรี(ellipse) และไฮเพอร์โบลา (hyperbola) ที่เกิดจากการนำระนาบไปตัดกรวยกลมตรง

วงกลม คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบเป็นระยะทางเท่ากัน จุดคงที่นี้ เรียกว่า **จุดศูนย์กลาง** ของวงกลม และระยะทางที่เท่ากัน เรียกว่า **รัศมี** ของวงกลม

จุดประสงค์การเรียนรู้

1. บอกได้ว่าสมการที่กำหนดให้เป็นสมการวงกลมหรือไม่
2. สามารถเปลี่ยนสมการวงกลมในรูปทั่วไปเป็นสมการวงกลมในรูปมาตรฐานได้

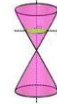
สาระการเรียนรู้

1. สมการวงกลมที่จุดศูนย์กลางอยู่ที่ $(0, 0)$ และรัศมียาว r หน่วย คือ $x^2 + y^2 = r^2$
2. สมการวงกลมที่จุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) และรัศมียาว r หน่วย คือ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$
3. รูปทั่วไปของสมการวงกลมคือ $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

จุดศูนย์กลางของวงกลมคือ $C(h, k) = \left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2} \right)$ และ

รัศมีเท่ากับ $\sqrt{h^2 + k^2 - C}$





ใบความรู้ที่ 1.1

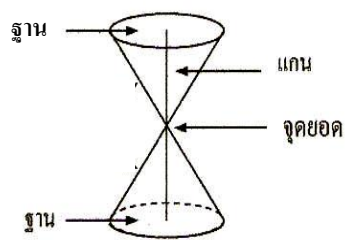
วิชาคณิตศาสตร์

ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4

เรื่อง สมการของกราฟวงกลม

กรวย

ส่วนประกอบของกรวยเป็นดังรูปที่ 1



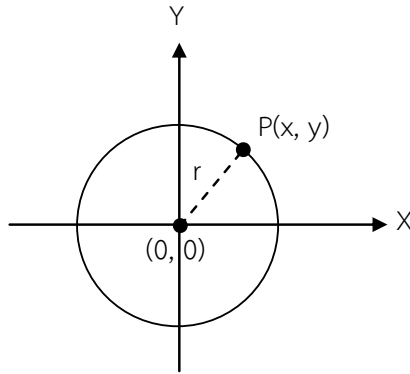
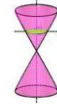
รูปที่ 1

วงกลม (Circle)

วงกลมเกิดจากระนาบที่ตั้งฉากกับแกนของกรวย และระนาบตัดกรวยข้างเดียว ดังนี้

รูประนาบที่ตัดกรวย	ลักษณะของระนาบที่ตัดกรวย	เส้นโค้งที่เกิดจากการตัดกรวย
	ระนาบที่ตัดกรวยตั้งฉากกับแกนของกรวย	

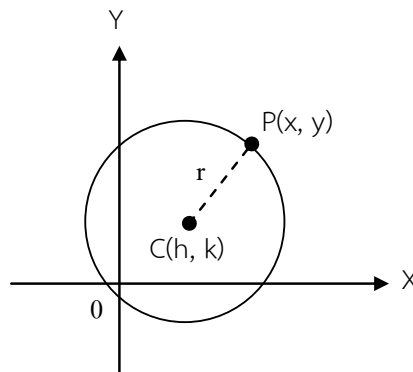
บทนิยาม วงกลม (circle) คือเซตของจุดทุกจุดบนระนาบที่ห่างจากจุด ๆ หนึ่งที่ตรึงอยู่กับที่เป็นระยะทางคงตัว จุดตรึงอยู่กับที่นี้ เรียกว่า **จุดศูนย์กลาง** (center) ของวงกลม และระยะทางคงตัวดังกล่าวเรียกว่า **รัศมี** (radius) ของวงกลม



รูปที่ 2

จากรูปที่ 2 แสดงกราฟของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (0, 0) และรัศมีเท่ากับ r จะมีรูปสมการเป็น

$$x^2 + y^2 = r^2$$



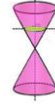
รูปที่ 3

จากรูปที่ 3 แสดงกราฟของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่ (h, k) และรัศมีเท่ากับ r เราจะหาสมการที่มีกราฟเป็นวงกลมรูปนี้ได้โดย สมมุติว่า P(x, y) เป็นจุดใด ๆ บนวงกลม เนื่องจากระยะทางระหว่าง P(x, y) และ C(h, k) เท่ากับ r นั่นคือ $PC = r$ ดังนั้น จากสูตรระยะทางระหว่างจุดสองจุดจะได้ว่า

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r \quad \text{ยกกำลังสองทั้งสองข้าง}$$

$$\text{นั่นคือ } (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad \text{เป็นสมการวงกลมที่ต้องการ}$$





สมการของวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) และรัศมีเท่ากับ r คือ

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$$

สมการนี้เรียกว่า **รูปแบบมาตรฐาน** ของสมการวงกลม



จากรูปแบบมาตรฐาน $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

$$x^2 - 2hx + h^2 + y^2 - 2ky + k^2 = r^2$$

$$x^2 + y^2 - 2hx - 2ky + (h^2 + k^2 - r^2) = 0$$

$$\text{ให้ } A = -2h, B = -2k, C = h^2 + k^2 - r^2$$

จะได้สมการวงกลมในรูปทั่วไป คือ $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$



ตัวอย่าง สมการของกราฟวงกลม



ตัวอย่าง จงพิจารณาสมการที่กำหนดให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นสมการวงกลมหรือไม่

1. $x^2 + y^2 = 25$

จาก $x^2 + y^2 = r^2$

จะได้ว่า $r = 5$

แสดงว่า $x^2 + y^2 = 25$ เป็นสมการวงกลม

2. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 16$

จาก $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

จะได้ว่า $r = 4$

แสดงว่า $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 16$ เป็นสมการวงกลม

3. $x^2 + y^2 = 0$

จาก $x^2 + y^2 = r^2$

จะได้ว่า $r = 0$ (รัศมี เป็น 0 ไม่ได้)

แสดงว่า $x^2 + y^2 = 0$ ไม่เป็นสมการวงกลม

4. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 0$

จาก $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

จะได้ว่า $r = 0$ (รัศมี เป็น 0 ไม่ได้)

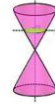
แสดงว่า $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 0$ ไม่เป็นสมการวงกลม

5. $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = -7$

จาก $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

จะได้ว่า $r = \sqrt{-7}$ (รัศมี เป็นจำนวนจินตภาพหาค่าแท้จริงไม่ได้)

แสดงว่า $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = -7$ ไม่เป็นสมการวงกลม



ตัวอย่าง การเปลี่ยนสมการวงกลมรูปทั่วไปใช้เป็นสมการวงกลมในรูปมาตรฐาน

ตัวอย่าง จงเปลี่ยนสมการวงกลมในรูปทั่วไปของแต่ละข้อ ให้เป็นสมการวงกลมในรูปมาตรฐาน

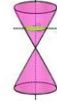
1. $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 1 = 0$
 $(x^2 - 8x) + (y^2 - 2y) = -1$ จัดกลุ่ม
 $(x^2 - 8x + 4^2) + (y^2 - 2y + 1^2) = -1 + 4^2 + 1^2$ ทำกำลังสองสมบูรณ์
 $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 4^2$

2. $x^2 + y^2 + 8x + 12 = 0$
 $(x^2 + 8x) + y^2 = -12$ จัดกลุ่ม
 $(x^2 + 8x + 4^2) + y^2 = -12 + 4^2$ ทำกำลังสองสมบูรณ์
 $(x + 4)^2 + (y - 0)^2 = 2^2$

3. $x^2 + y^2 + 9y + 12 = 0$
 $(x^2 + 8x) + y^2 = -12$ จัดกลุ่ม
 $(x^2 + 8x + 4^2) + y^2 = -12 + 4^2$ ทำกำลังสองสมบูรณ์
 $(x + 4)^2 + (y - 0)^2 = 2^2$

4. $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 4 = 0$
 $(x^2 - 4x) + (y^2 + 6y) = -4$ จัดกลุ่ม
 $(x^2 - 4x + 2^2) + (y^2 + 6y + 3^2) = -4 + 2^2 + 3^2$ ทำกำลังสองสมบูรณ์
 $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 3^2$





แบบฝึกทักษะ 1.1

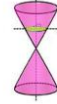
เรื่อง สมการของกราฟวงกลม

ชื่อ _____ ชั้น ม. 4 / _____ เลขที่ _____

คำชี้แจง ให้นักเรียนพิจารณาว่าสมการที่กำหนดมาให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้ เป็นสมการวงกลมหรือไม่ (ถ้าเป็นสมการวงกลมให้ใส่เครื่องหมาย ✓ ในช่องคำว่า เป็น ถ้าไม่เป็นสมการวงกลมให้ใส่เครื่องหมาย ✗ ในช่องคำว่าไม่เป็น ซึ่งอยู่ด้านหลังของสมการ)

	เป็น	ไม่เป็น
1. $x^2 + y^2 = 9$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. $x^2 + y^2 = 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
3. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
5. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. $x^2 + y^2 = -2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
7. $x^2 = -y^2$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
8. $x^2 + (y - 2)^2 = 25$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. $(x - 3)^2 + y^2 = 0$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
10. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = -16$	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>





แบบฝึกทักษะ 1.2

เรื่อง การเปลี่ยนสมการวงกลมในรูปทั่วไปให้เป็นรูปมาตรฐาน

ชื่อ _____ ชั้น ม. 4 / _____ เลขที่ _____

คำชี้แจง จงเปลี่ยนสมการวงกลมในรูปทั่วไปของแต่ละข้อ ให้เป็นสมการวงกลมในรูป

มาตรฐาน

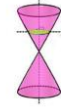
1. $x^2 + y^2 - 10x + 4y - 7 = 0$

2. $x^2 + y^2 + 4x + 12y + 36 = 0$

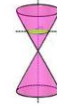
3. $x^2 + y^2 + 10y = 0$

4. $x^2 + y^2 + 4x = 0$

5. $x^2 + y^2 - 10x + 24y + 25 = 0$



ภาคผนวก



เฉลยแบบฝึกทักษะ 1.1

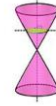
เรื่อง สมการของกราฟวงกลม

ชื่อ _____ ชั้น ม. 4 / _____ เลขที่ _____

คำชี้แจง ให้นักเรียนพิจารณาว่าสมการที่กำหนดมาให้ในแต่ละข้อต่อไปนี้เป็นสมการวงกลมหรือไม่ (ถ้าเป็นสมการวงกลมให้ใส่เครื่องหมาย ✓ ในช่องคำว่า เป็น ถ้าไม่เป็นสมการวงกลมให้ใส่เครื่องหมาย ✓ ในช่องคำว่าไม่เป็น ซึ่งอยู่ด้านหลังของสมการ)

	เป็น	ไม่เป็น
1. $x^2 + y^2 = 9$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
2. $x^2 + y^2 = 0$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
3. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 4$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 0$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
5. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
6. $x^2 + y^2 = -2$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
7. $x^2 = -y^2$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
8. $x^2 + (y - 2)^2 = 25$	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
9. $(x - 3)^2 + y^2 = 0$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>
10. $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = -16$	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>





เฉลยแบบฝึกทักษะ 1.2

เรื่อง สมการของกราฟวงกลม

ชื่อ _____ ชั้น ม. 4 / _____ เลขที่ _____

คำชี้แจง จงเปลี่ยนสมการวงกลมในรูปทั่วไปของแต่ละข้อ ให้เป็นสมการวงกลมในรูป

มาตรฐาน

$$\begin{aligned}
 1. \quad & x^2 + y^2 - 10x + 4y - 7 = 0 \\
 & \underline{(x^2 - 10x) + (y^2 + 4y) = 7} \\
 & \underline{(x^2 - 10x + 5^2) + (y^2 + 4y + 2^2) = 7 + 5^2 + 2^2} \\
 & \underline{(x - 5)^2 + (y + 2)^2 = 6^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2. \quad & x^2 + y^2 + 4x + 12y + 36 = 0 \\
 & \underline{(x^2 + 4x) + (y^2 + 12y) = -36} \\
 & \underline{(x^2 + 4x + 2^2) + (y^2 + 12y + 6^2) = -36 + 2^2 + 6^2} \\
 & \underline{(x + 2)^2 + (y + 6)^2 = 2^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3. \quad & x^2 + y^2 + 10y = 0 \\
 & \underline{x^2 + (y^2 + 10y) = 0} \\
 & \underline{x^2 + (y^2 + 10y + 5^2) = 5^2} \\
 & \underline{(x - 0)^2 + (y + 5)^2 = 5^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4. \quad & x^2 + y^2 + 4x = 0 \\
 & \underline{(x^2 + 4x) + y^2 = 0} \\
 & \underline{(x^2 + 4x + 2^2) + y^2 = 2^2} \\
 & \underline{(x + 2)^2 + (y - 0)^2 = 2^2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5. \quad & x^2 + y^2 - 10x + 24y + 25 = 0 \\
 & \underline{(x^2 - 10x) + (y^2 + 24y) = -25} \\
 & \underline{(x^2 - 10x + 5^2) + (y^2 + 24y + 12^2) = -25 + 5^2 + 12^2} \\
 & \underline{(x - 5)^2 + (y + 12)^2 = 12^2}
 \end{aligned}$$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1

สาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ วิชา คณิตศาสตร์เพิ่มเติม รหัส ค31202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4
 หน่วยการเรียนรู้ที่ 2 ภาคตัดกรวย เวลา 19 ชั่วโมง
 เรื่อง ความรู้พื้นฐานของวงกลม เวลา 1 ชั่วโมง
 สอนวันที่ 22 เดือน พฤศจิกายน พ.ศ. 2559 ภาคเรียนที่ 2 ปีการศึกษา 2559
 ผู้สอน นายประยุทธ์ ธนากาญจน์ภาส

.....

มาตรฐาน ค 6.1 มีความสามารถในการแก้ปัญหา การให้เหตุผล การสื่อสาร การสื่อความหมายทางคณิตศาสตร์ และการนำเสนอ การเชื่อมโยงความรู้ต่าง ๆ ทางคณิตศาสตร์และเชื่อมโยงคณิตศาสตร์กับศาสตร์อื่น ๆ และมีความคิดริเริ่มสร้างสรรค์

ผลการเรียนรู้

1. เขียนกราฟและหาส่วนต่าง ๆ ของไฮเพอร์โบลาเมื่อกำหนดความสัมพันธ์ของกราฟไฮเพอร์โบลาให้ได้

สาระสำคัญ

ภาคตัดกรวย (Conic Section) หมายถึง เส้นโค้ง ซึ่ง ได้แก่ วงกลม(circle) พาราโบลา (parabola) วงรี (ellipse) และไฮเพอร์โบลา (hyperbola) ที่เกิดจากการนำระนาบไปตัดกรวยกลมตรง

วงกลม คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบเป็นระยะเท่ากันจุดคงที่นี้ เรียกว่า **จุดศูนย์กลาง**ของวงกลม และระยะทางที่เท่ากัน เรียกว่า **รัศมี** ของวงกลม

จุดประสงค์การเรียนรู้

ด้านความรู้

- 1) บอกนิยามของวงกลมได้อย่างถูกต้อง
- 2) บอกได้ว่าสมการที่กำหนดให้เป็นสมการวงกลมหรือไม่เป็นสมการวงกลมได้
- 3) สามารถเปลี่ยนสมการวงกลมในรูปทั่วไปเป็นสมการวงกลมในรูปมาตรฐานได้

ด้านทักษะ/กระบวนการ

- 1) การทำงานร่วมกันเป็นกลุ่ม
- 2) การสื่อความหมายในทางคณิตศาสตร์

ด้านคุณลักษณะอันพึงประสงค์

- 1) ความซื่อสัตย์
- 2) มีความรับผิดชอบ

สาระการเรียนรู้

พื้นฐานของวงกลม สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด $(0, 0)$ และรัศมี r หน่วย คือ $x^2 + y^2 = r^2$ สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่จุด (h, k) และรัศมี r หน่วย คือ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

กิจกรรมการเรียนรู้ (การเรียนรู้แบบร่วมมือเทคนิค STAD)

ขั้นที่ 1 ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. ครูแจ้งจุดประสงค์การเรียนรู้
2. ให้นักเรียนชมวิดีโอการสอนในเว็บไซต์

<https://www.youtube.com/watch?v=fWxqFH9f7So> (5 นาทีแรกเท่านั้น)

3. ครูให้นักเรียนวาดรูปวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ด้วย ครูสังเกตวงกลมที่นักเรียนวาด มีนักเรียนบางคนวาดไม่เป็นรูปวงกลม ครูจึงร่วมอภิปรายกับนักเรียนว่าจะต้องทำอะไรถึงจะวาดวงกลมให้ได้ถูกต้องและลองให้นักเรียนที่วาดไปเป็นวงกลม วาดวงกลมใหม่อีกครั้ง (ในการสร้างรูปวงกลมให้ถูกต้องนักเรียนอาจจะต้องใช้วงเวียนช่วยในการสร้างวงกลม หรืออาจใช้กระดาษชิ้นเล็กๆ เจาะรูป 2 รูปแล้วใช้ดินสอวาด)

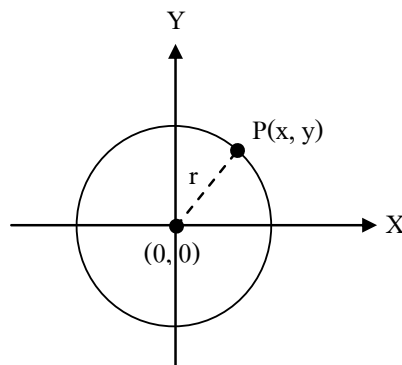
ขั้นที่ 2 ขั้นการเสนอบทเรียนต่อทั้งชั้น

1. ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 1.1 เรื่อง นิยามของวงกลม
2. ให้นักเรียนร่วมกันอภิปราย นิยามของวงกลมจนสรุปได้ว่า

วงกลม คือ เซตของจุดทุกจุดบนระนาบ ซึ่งอยู่ห่างจากจุดคงที่จุดหนึ่งบนระนาบเป็นระยะเท่ากัน จุดคงที่นี้ เรียกว่า **จุดศูนย์กลาง** ของวงกลม และระยะทางที่เท่ากัน เรียกว่า **รัศมี** ของวงกลมโดยมีครูคอยแนะนำและเริ่มคำพูดต่างๆ ให้

3. ครูอธิบายที่มาของสมการวงกลมให้นักเรียนเข้าใจดังนี้

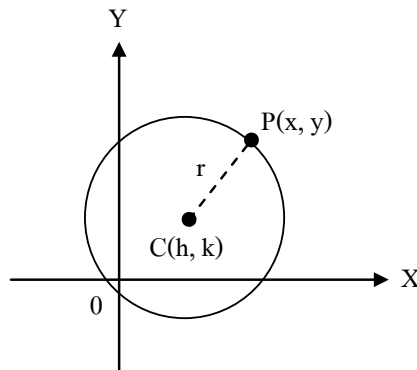
เมื่อเรานำรูปวงกลมมาใส่ในระนาบพิกัดฉากโดยมีจุดศูนย์กลางอยู่ที่จุด $(0, 0)$ กำหนดจุด $P(x, y)$ อยู่บนเส้นรอบวงของวงกลม และให้มีรัศมียาวเท่ากับ r ดังรูป



จากรูปจะเห็นว่าระยะทางจากจุดศูนย์กลาง $(0, 0)$ ถึงจุด $P(x, y)$ เท่ากับ r หน่วย

จะได้ว่า $\sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} = r$
 $\sqrt{x^2 + y^2} = r$
 จะได้สมการวงกลม คือ $x^2 + y^2 = r^2$ (ยกกำลังสองทั้งสองข้าง)

จากรูปด้านบนเมื่อเราเลื่อนจุดศูนย์กลางของวงกลมไปอยู่ที่อื่น (h, k) ดังรูป



จากรูปจะเห็นว่าระยะทางจากจุดศูนย์กลาง (h, k) ถึงจุด $P(x, y)$ เท่ากับ r หน่วย

จะได้ว่า $\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2} = r$
 $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$ (ยกกำลังสองทั้งสองข้าง)

จะได้สมการวงกลมที่มีจุดศูนย์กลางอยู่ที่ (h, k) และรัศมียาว r หน่วย คือ

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \quad (\text{สมการวงกลมในรูปมาตรฐาน})$$

(ใช้ Power Point ในการนำเสนอ)

4. ให้นักเรียนทำใบกิจกรรมที่ 1.2 เรื่อง สมการของกราฟวงกลม

5. ให้นักเรียนร่วมกันอภิปรายลักษณะของสมการวงกลมในรูปมาตรฐาน และครูนำเสนอ

สมการ

วงกลมในรูปทั่วไปให้นักเรียนได้เรียนรู้ไว้

6. ครูยกตัวอย่างการเปลี่ยนสมการวงกลมในรูปทั่วไปของแต่ละข้อ ให้เป็นสมการวงกลมในรูปมาตรฐาน

1. $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 16 = 0$

$$(x^2 - 8x) + (y^2 - 6y) = -16 \quad \text{จัดกลุ่ม}$$

$$(x^2 - 8x + 4^2) + (y^2 - 6y + 3^2) = -16 + 4^2 + 3^2 \quad \text{ทำกำลังสองสมบูรณ์}$$

$$(x-4)^2 + (y-3)^2 = 3^2$$

2. $x^2 + y^2 + 8x - 6y + 9 = 0$ (ครูให้นักเรียนแต่ละคนลองทำด้วยตนเอง)

$$(x^2 + 8x) + (y^2 - 6y) = -9 \quad \text{จัดกลุ่ม}$$

$$(x^2 + 8x + 4^2) + (y^2 - 6y + 3^2) = -9 + 4^2 + 3^2 \quad \text{ทำกำลังสองสมบูรณ์}$$

$$(x+4)^2 + (y-3)^2 = 4^2$$

7. สุ่มนักเรียน 1 คน ออกมาเขียนแสดงวิธีทำให้ถูกต้อง ให้เพื่อน ๆ ในห้องดู

ขั้นที่ 3 ขั้นสรุป

1. ให้นักเรียนเขียนสรุปนิยามของวงกลมลงในใบกิจกรรม โดยมีแนวตอบดังนี้ วงกลม (circle) คือเซตของจุดทุกจุดบนระนาบที่ห่างจากจุด ๆ หนึ่งที่ตั้งอยู่กึ่งกลางที่เป็นระยะทางคงตัว
2. ให้นักเรียนเขียนสรุปสมการของกราฟวงกลมลงในใบกิจกรรม โดยมีแนวตอบดังนี้ สมการวงกลมในรูปมาตรฐาน คือ $x^2 + y^2 = r^2$ หรือ $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ จะเป็นสมการวงกลมได้นั้น $r > 0$
3. นักเรียนร่วมกันสรุปขั้นตอนการเปลี่ยนสมการในรูปทั่วไปให้อยู่ในรูปมาตรฐานว่า นักเรียนจะต้องอาศัยขั้นตอนการทำกำลังสองสมบูรณ์และเทียบรูปแบบกับสมการวงกลมในรูปมาตรฐาน

ขั้นที่ 4 ขั้นการศึกษากลุ่มย่อย

1. นักเรียนศึกษาใบความรู้ที่ 1.1 เรื่อง สมการของกราฟวงกลม ในแบบฝึกทักษะเล่มที่ 1 เรื่อง ความรู้พื้นฐานของวงกลม ให้นักเรียนทำงานที่ได้รับมอบหมายอย่างเต็มความสามารถ เสร็จตามกำหนดเวลา ผลงานมีคุณภาพ ให้ความร่วมมือกับสมาชิกในกลุ่มด้วยความเต็มใจทุกครั้ง แสดงความคิดเห็นอย่างมีเหตุผล และรับฟังความคิดเห็นของผู้อื่นทุกครั้ง มีการวางแผนขั้นตอนในการปฏิบัติงานอย่างเป็นระบบ ใช้ภาษาและสัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์ที่ถูกต้อง แสดงข้อมูลประกอบลำดับขั้นตอนได้ถูกต้องชัดเจน และมีรายละเอียดที่สมบูรณ์ โดยคนเก่งช่วยเหลือคนที่อ่อนกว่า ขณะเดียวกันครูคอยให้คำแนะนำช่วยเหลือเมื่อนักเรียนมีปัญหา
2. เมื่อนักเรียนศึกษาใบความรู้เข้าใจแล้ว ให้นักเรียนแต่ละคน ทำแบบฝึกทักษะที่ 1.1 เรื่อง สมการของกราฟวงกลม และแบบฝึกทักษะที่ 1.2 เรื่อง การเปลี่ยนสมการวงกลมในรูปทั่วไปให้เป็นรูปมาตรฐาน ในแบบฝึกทักษะเล่มที่ 1 เรื่อง ความรู้พื้นฐานของวงกลม ครูกระตุ้นให้นักเรียนเน้นการอภิปรายกลุ่ม โดยช่วยเหลือซึ่งกันและกัน และรับผิดชอบในการเรียนรู้ของตนเอง
3. ครูแจกเฉลยแบบฝึกทักษะที่ 1.1 เรื่อง สมการของกราฟวงกลม และแบบฝึกทักษะที่ 1.2 เรื่อง การเปลี่ยนสมการวงกลมในรูปทั่วไปให้เป็นรูปมาตรฐาน ในแบบฝึกทักษะเล่มที่ 1 เรื่อง ความรู้พื้นฐานของวงกลม โดยเปลี่ยนกันตรวจระหว่างกลุ่ม ถ้าผิดข้อใดให้สมาชิกในกลุ่มศึกษาข้อผิดพลาดและทำความเข้าใจร่วมกัน

สื่อการเรียนรู้/แหล่งการเรียนรู้

1. ปากกาหัวม้า เชือก และกระดาษ
2. Power Point แสดงที่มาของสมการวงกลม
3. ใบกิจกรรมที่ 1.1 เรื่อง สำรวจนิยามของวงกลม
4. ใบกิจกรรมที่ 1.2 เรื่อง สมการของกราฟวงกลม
5. ใบความรู้ที่ 1.1 เรื่อง สมการของกราฟวงกลม ในแบบฝึกทักษะเล่มที่ 1 เรื่อง ความรู้พื้นฐานของวงกลม
6. แบบฝึกทักษะ ที่ 1.1 เรื่อง สมการของกราฟวงกลม ในแบบฝึกทักษะเล่มที่ 1 เรื่อง ความรู้พื้นฐานของวงกลม

7. แบบฝึกทักษะ ที่ 1.2 เรื่อง การเปลี่ยนสมการวงกลมในรูปทั่วไปให้เป็นรูปมาตรฐาน ในแบบฝึกทักษะเล่มที่ 1 เรื่อง ความรู้พื้นฐานของวงกลม

การวัดผลและประเมินผล

1. วิธีการวัด

- 1.1 ตรวจสอบแบบฝึกทักษะที่ 1.1 เรื่อง สมการของกราฟวงกลม
- 1.2 ตรวจสอบแบบฝึกทักษะที่ 1.2 เรื่อง การเปลี่ยนสมการวงกลมในรูปทั่วไปให้เป็นรูปมาตรฐาน
- 1.3 สังเกตพฤติกรรม เพื่อประเมินทักษะ/กระบวนการ
- 1.4 สังเกตพฤติกรรม เพื่อประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์

2. เครื่องมือวัด

- 2.1 แบบฝึกทักษะ
- 2.2 แบบประเมินทักษะ / กระบวนการ
- 2.3 แบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์

3. เกณฑ์การประเมิน

- 3.1 นักเรียนสามารถทำแบบฝึกทักษะเล่มที่ 1 เรื่อง ความรู้พื้นฐานของวงกลมได้ถูกต้อง ไม่น้อยกว่าร้อยละ 75 ถือว่าผ่านเกณฑ์
- 3.2 นักเรียนผ่านเกณฑ์การประเมินด้วยแบบประเมินทักษะ/กระบวนการไม่น้อยกว่าร้อยละ 75 ถือว่าผ่านเกณฑ์
- 3.3 นักเรียนผ่านเกณฑ์การประเมินด้วยแบบประเมินคุณลักษณะอันพึงประสงค์ไม่น้อยกว่า ร้อยละ 75 ถือว่าผ่านเกณฑ์

ใบกิจกรรมที่ 1.1

ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 ความรู้พื้นฐานของวงกลม

เรื่อง สำนวนนิยามของวงกลม

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค31202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ภาคตัดกรวย

คำชี้แจง ให้นักเรียนดำเนินการตรวจสอบนิยามของวงกลมดังนี้

1. ให้นักเรียนนำเชือกและปากกาหัวม้าที่ครูเตรียมไว้ ผูกปลายเชือกข้างหนึ่งกับปากกาหัวม้า และผูกปลายเชือกอีกข้างหนึ่งกับปากกาของนักเรียนให้ยาวพอประมาณ
2. เอาปากกาจุดลงกลางหน้ากระดาษ A4 จุดไว้ให้อยู่กับที่ จับปากกาหัวม้ามาจุดลงบนกระดาษโดยดึงเชือกให้ตึง จุดไปเรื่อย
3. ให้นักเรียนสังเกตสิ่งที่เกิดขึ้นแล้วสรุปเป็นข้อความไว้ในกรอบสี่เหลี่ยมด้านล่าง

สรุป _____

ใบกิจกรรมที่ 1.2

ประกอบแผนการจัดการเรียนรู้ที่ 1 ความรู้พื้นฐานของวงกลม

เรื่อง สมการของกราฟวงกลม

วิชาคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ค31202 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เรื่อง ภาคตัดกรวย

คำชี้แจง ให้นักเรียนศึกษาตัวอย่างของสมการของกราฟวงกลมดังตัวอย่างที่กำหนดให้ และเขียนสรุปความรู้เกี่ยวกับสมการของกราฟวงกลม

1. $x^2 + y^2 = 9$

จาก $x^2 + y^2 = r^2$

จะได้ว่า $r = 3$

แสดงว่า $x^2 + y^2 = 9$ เป็นสมการวงกลม

2. $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 25$

จาก $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

จะได้ว่า $r = 5$

แสดงว่า $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 25$ เป็นสมการวงกลม

3. $x^2 + y^2 = 0$

จาก $x^2 + y^2 = r^2$

จะได้ว่า $r = 0$ (รัศมี เป็น 0 ไม่ได้)

แสดงว่า $x^2 + y^2 = 0$ ไม่เป็นสมการวงกลม

4. $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 0$

จาก $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

จะได้ว่า $r = 0$ (รัศมี เป็น 0 ไม่ได้)

แสดงว่า $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 0$ ไม่เป็นสมการวงกลม

5. $(x - 3)^2 + (y + 3)^2 = -16$

จาก $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$

จะได้ว่า $r = \sqrt{-16}$ (รัศมี เป็นจำนวนจินตภาพหาค่าแท้จริงไม่ได้)

แสดงว่า $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = -16$ ไม่เป็นสมการวงกลม

สรุปความรู้ที่ได้เกี่ยวกับ สมการของกราฟวงกลม

บรรณานุกรม

- กนกวลี อุษณกรกุล. (2553). **คณิตศาสตร์เพิ่มเติมชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2**. กรุงเทพมหานคร. เดอะบุคส์.
- เจริญ ภูภัทรพงศ์. **คณิตศาสตร์เพิ่มเติม ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4 เล่ม 2**. กรุงเทพมหานคร. SCIENCE CENTER.
- ถนอมวรรณ ประเสริฐเจริญสุข. (2543). **รูปแบบการสอนแบบร่วมมือกันเรียนรู้ (Cooperative Learning Model)**. ขอนแก่น : มหาวิทยาลัยขอนแก่น.
- ทรงวิทย์ สุวรรณธาดา. **แบบฝึกคณิตศาสตร์เพิ่มเติม ม.4**. กรุงเทพมหานคร. แม็ค. วัฒนาพร ระวังทุกข์. (2541). **การจัดการเรียนการสอนที่เน้นนักเรียนเป็นศูนย์กลาง**. กรุงเทพมหานคร. ตันอ้อ 1999.
- บุญชม ศรีสะอาด. (2541). **วิธีการทางสถิติสำหรับการวิจัย เล่ม 1**. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร : สุวีริยาสาส์น.
- _____. (2541). **การวิจัยเบื้องต้น**. กรุงเทพมหานคร : สุวีริยาสาส์น. วัฒนาพร ระวังทุกข์. (2541). **การจัดการเรียนการสอนที่เน้นนักเรียนเป็นศูนย์กลาง**. กรุงเทพมหานคร : ตันอ้อ 1999.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2547). **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ชั้นมัธยมศึกษาปีที่ 4**. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ครูสภาลาดพร้าว.
- สถาบันส่งเสริมการสอนวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี. (2551). **หนังสือเรียนสาระการเรียนรู้เพิ่มเติมคณิตศาสตร์ เล่ม 2 ม.4**. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ สกสศ.
- สมัย เหล่าวานิชย์. (ม.ป.ป.). **Mathematics Problems โจทย์คณิตศาสตร์ ม. 4-5-6**. กรุงเทพมหานคร : ไฮเอ็ดพับลิชชิ่ง จำกัด.
- สำนักงานคณะกรรมการการศึกษาขั้นพื้นฐาน. (2553). **แนวทางการจัดกิจกรรมการเรียนรู้เพื่อพัฒนาทักษะการคิด ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551 กลุ่มสาระการเรียนรู้คณิตศาสตร์ ระดับมัธยมศึกษา**. กรุงเทพมหานคร : โรงพิมพ์ชุมนุมสหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทย จำกัด.
- อำรุง จันทรวานิช. (2543). **ปฏิรูปการเรียนรู้ที่เน้นนักเรียนเป็นสำคัญที่สุด**. พิมพ์ครั้งที่ 3. กรุงเทพมหานคร : ครูสภาลาดพร้าว.



ความรู้พื้นฐานของวงกลม

Student Team - Achievement Division